Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

Table des matières

1 Primitives et intégrales des fonctions à valeurs complexes

Nous généralisons les résultats vus en terminale sur les primitives et les intégrales des fonctions à valeurs réelles.

Définition 1.1 (primitive d'une fonction complexe)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial.
Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{C}$ qui est dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Remarque : F est une primitive de f si et seulement si $\mathfrak{Re}(F)$ est une primitive de $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(F)$ est une primitive de $\mathfrak{Im}(f)$.

Méthode : Pour trouver une primitive d'une fonction du type $x \mapsto \mathbf{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathbf{e}^{ax}\sin(bx)$, on cherche une primitive de la fonction complexe $x \mapsto \mathbf{e}^{(a+\mathbf{i}b)x}$, puis on prend sa partie réelle ou imaginaire.

Exemple 1.2 : Donner une primitive de $x \mapsto \mathbf{e}^{3x}\sin(4x)$.

Proposition 1.3 (structure de l'ensemble des primitives)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un **intervalle** non trivial.
Si f admet une primitive F_0 sur I, alors l'ensemble des primitives de f est

$$\{F_0 + k \ / \ k \in \mathbb{C}\} = \{x \mapsto F_0(x) + k \ / \ k \in \mathbb{C}\}.$$

Remarque : Si f est définie sur une réunion d'intervalles, on a une constante d'intégration pour chaque intervalle.

Définition 1.4 (intégrale d'une fonction complexe, définition provisoire)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, avec I un intervalle non trivial. Soit $(a,b) \in I^2$.
On définit l'intégrale de f entre a et b par $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathfrak{Re}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b \mathfrak{Im}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$

Théorème 1.5 (théorème fondamental de l'intégration)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.
La fonction

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une primitive de f sur I.

Conséquence : Toute fonction continue sur un intervalle admet (au moins) une primitive.

Corollaire 1.6 (calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, avec I un intervalle non trivial, et soit F une primitive de f.
Alors pour tous a et b dans I, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b$, où $\big[F(t)\big]_a^b$ est une notation pour $F(b) - F(a)$.

Exemple 1.7 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+5}\mathrm{d}x$.

2 Propriétés des intégrales

La plupart des propriétés énoncées ici sont des rappels de terminale, éventuellement généralisés aux fonctions à valeurs complexes. Les deux nouveautés sont l'inégalité triangulaire pour les intégrales et le théorème concernant la stricte positivité d'une intégrale.
Toutes ces propriétés seront démontrées dans le chapitre « Intégration ».

Dans les énoncés qui suivent :
- I désigne un intervalle non trivial, et a, b, c sont des réels dans I ;
- f et g désignent des fonctions continues sur I, à valeurs réelles ou complexes.

2.1 Relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$

2.2 Linéarité

Pour tous nombres λ et μ réels ou complexes :

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

2.3 Inégalités

Sauf pour l'inégalité triangulaire, les fonctions sont ici supposées à valeurs réelles.

2.3.1 Inégalités larges

On suppose ici $a \leqslant b$.

1. **Positivité :** Si $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
   (énoncé similaire si f est négative)
2. **Croissance :** Si $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (valable aussi si f est à valeurs complexes)

2.3.2 Inégalités strictes

On suppose ici $a < b$.

Théorème : Si f est continue positive et n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Remarques :
1. Le fait que f ne soit pas la fonction nulle sur $[a,b]$ signifie : $\exists t_0 \in [a,b]$, $f(t_0) \neq 0$.
2. On a un énoncé similaire pour la stricte négativité.

Conséquences :

1. **Positivité stricte :** Si $\forall t \in [a,b]$, $f(t) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.
   (énoncé similaire si f est strictement négative)
2. **Croissance stricte :** Si $\forall t \in [a,b]$, $f(t) < g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Primitives à connaître

La fonction $f : x \mapsto \dots$	admet cette primitive $F : x \mapsto \dots$	sur l'intervalle ...
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$		$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ $\mathbb{R}_+$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*\backslash\mathbb{Z}_-^*$
$\dfrac{1}{x}$		$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\cos(x)$		$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$
$\tan(x)$		$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}(x)$		$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$		$\mathbb{R}$
$\mathbf{e}^{ax} \quad (a \in \mathbb{C}^*)$		$\mathbb{R}$
$\ln(x)$		$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$]-1\,,1[$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$		$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

En plus de connaître ces primitives usuelles, il faut aussi savoir :
- reconnaître les dérivées de fonctions composées simples, par exemple $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'\mathbf{e}^u$, $u'\cos(u)$, $u'\sin(u)$, etc.
- linéariser une expression polynomiale en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ afin d'en déterminer une primitive ;
- utiliser une intégration par parties ou un changement de variable lorsque cela est nécessaire (voir plus loin).

Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{P(x)}$, où P est une fonction polynomiale réelle du second degré :

1. Si P n'a pas de racine réelle, on écrit $P(x)$ sous forme canonique afin de faire apparaître une fonction de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ (qui a comme primitive $\mathrm{Arctan} \circ u$).
2. Si P a une racine double x_0, on fait apparaître une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ (qui a pour primitive $\dfrac{-1}{u}$).
3. Si P a deux racines réelles x_1 et x_2, $\dfrac{1}{P(x)}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{x-x_1} + \dfrac{b}{x-x_2}$ (cas particulier de **décomposition en éléments simples**), qui s'intègre en $a\ln|x-x_1| + b\ln|x-x_2|$.

Exemple 3.1 : Proposer une primitive de :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$.

4 Intégration par parties

Théorème 4.1 (théorème d'intégration par parties)

Soient u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un **intervalle** I non trivial (à valeurs réelles ou complexes).
Alors pour tous a et b dans I :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 4.2 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathbf{e}^t \mathrm{d}t$.

Application au calcul de primitives : Pour calculer une primitive d'une fonction f définie sur I, on peut choisir un réel a dans I et utiliser une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (expression d'une primitive de f).

L'intégration par parties est particulièrement utile pour calculer des primitives ou des intégrales de fonctions de la forme :

- $x \mapsto P(x)\,\mathbf{e}^{ax}$, $x \mapsto P(x)\cos(bx)$ ou $x \mapsto P(x)\sin(bx)$, où P est une fonction polynomiale :
  $\longrightarrow$ on dérive P et on intègre l'exponentielle, le cosinus ou le sinus (éventuellement plusieurs fois) ;
- $x \mapsto P(x)\ln(x)$ où P est une fonction polynomiale :
  $\longrightarrow$ on dérive ln et on intègre P (cas particulier : primitive de ln).

Exemple 4.3 : Proposer une primitive de :

1. $f : x \mapsto \ln(x)$.
2. $g : x \mapsto x^2\sin(x)$.

5 Changement de variable

Théorème 5.1 (théorème de changement de variable)

Soient I et J deux **intervalles** non triviaux, et soient :

- $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$
- f une fonction (réelle ou complexe) continue sur J

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Alors pour tous a et b dans I : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Remarque : L'égalité précédente correspond au changement de variable $u = \varphi(t)$.
Il est important de ne pas mélanger les deux variables t et u dans la même intégrale et de ne pas oublier de changer les bornes lorsqu'on passe d'une intégrale à l'autre.

Exemple 5.2 : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\mathrm{d}t$.

Application au calcul de primitives : Pour calculer une primitive d'une fonction g définie sur I, on peut choisir un réel a dans I et utiliser un changement de variable pour calculer $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ (expression d'une primitive).

Exemple 5.3 : Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.